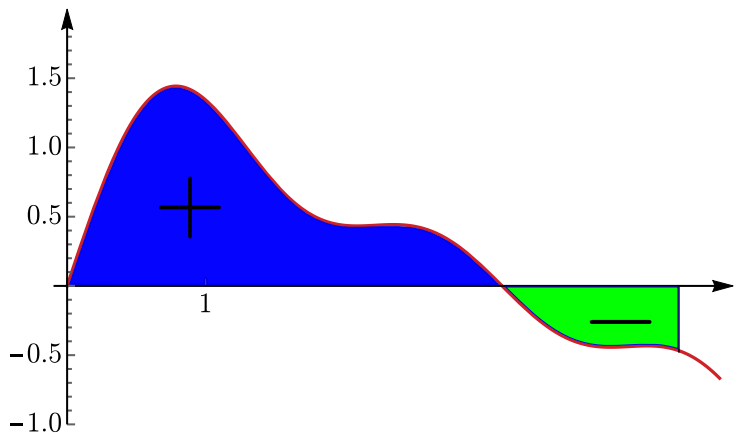


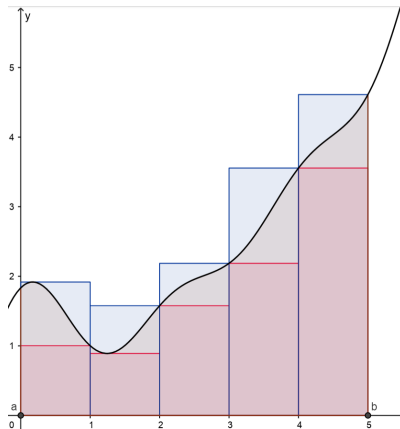
# Parciális integrálás, Improprius integrál, Alkalmazások

Nagy Noémi

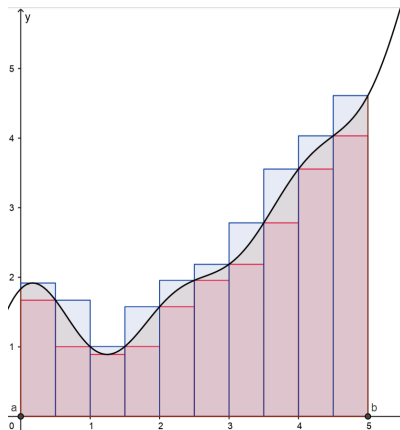
# Előjeles terület



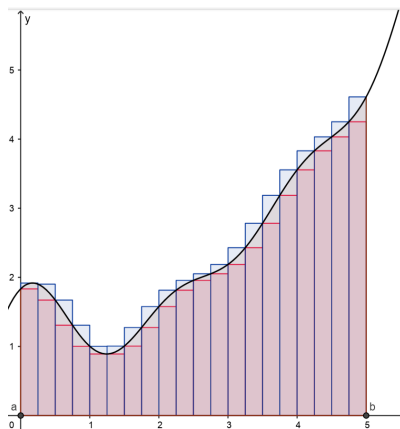
# Riemann Integrál



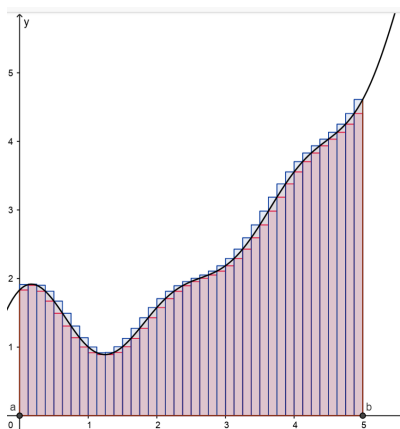
# Riemann Integrál



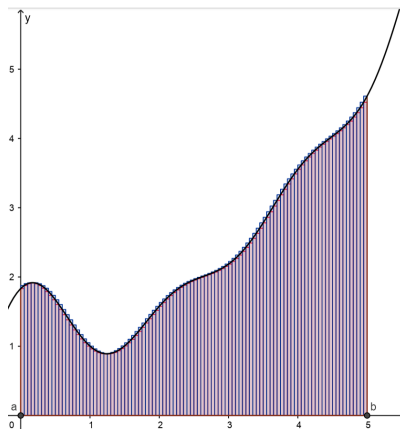
# Riemann Integrál



# Riemann Integrál



# Riemann Integrál



# Newton-Leibniz formula

## Definíció

Az  $f(x)$  függvény *primitív függvénye*  $F(x)$ , ha  $F'(x) = f(x)$ .



# Newton-Leibniz formula

## Definíció

Az  $f(x)$  függvény *primitív függvénye*  $F(x)$ , ha  $F'(x) = f(x)$ .

## Tétel (Newton-Leibniz formula)

Legyen  $g(x) \in R_{[a,b]}$  és legyen  $G(x)$  az  $g(x)$  primitív függvénye, ekkor:

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$$

# Határozatlan integrál definíciója

Ha  $F(x)$  primitív függvény akkor  $F(x) + C$  is az (ahol  $C$  egy tetszőleges konstans jelöl). Az [Integrálszámítás első főtételéből](#) tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

# Határozatlan integrál definíciója

Ha  $F(x)$  primitív függvény akkor  $F(x) + C$  is az (ahol  $C$  egy tetszőleges konstans jelöl). Az **Integrálszámítás első főtételéből** tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

## Definíció

Az  $f(x)$  **határozatlan integrálján** az  $f(x)$  összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele:  $\int f(x) dx$ .

# Határozatlan integrál definíciója

Ha  $F(x)$  primitív függvény akkor  $F(x) + C$  is az (ahol  $C$  egy tetszőleges konstans jelöl). Az **Integrálszámítás első főtétele**ből tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

## Definíció

Az  $f(x)$  **határozatlan integrálján** az  $f(x)$  összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele:  $\int f(x) dx$ .

Például:

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$$

# Határozatlan integrál definíciója

Ha  $F(x)$  primitív függvény akkor  $F(x) + C$  is az (ahol  $C$  egy tetszőleges konstans jelöl). Az **Integrálszámítás első főtételéből** tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

## Definíció

Az  $f(x)$  **határozatlan integrálján** az  $f(x)$  összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele:  $\int f(x) dx$ .

Például:

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Ezt ellenőrizni úgy lehet, hogy visszaderiváljuk tehát  $(\frac{x^2}{2} + C)' = \frac{2x}{2}$

# Parciális integrálás

Eddig, néhány összefüggés deriválásából kaptuk az alapintegrálokat. Nem feltétlenül tudtunk viszont olyan integrálokkal mit kezdeni, ahol a függvények szorozva vannak egymással:

$$\int f(x)g(x) dx = ?$$

# Parciális integrálás

Eddig, néhány összefüggés deriválásából kaptuk az alapintegrálokat. Nem feltétlenül tudtunk viszont olyan integrálokkal mit kezdeni, ahol a függvények szorozva vannak egymással:

$$\int f(x)g(x) dx = ?$$

Az ilyen esetekben segíthet a parciális integrálás.

# Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön



# Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

# Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$u'(x) \cdot v(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u(x)v'(x)$$

# Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$u'(x) \cdot v(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u(x)v'(x)$$

Mindkét oldalt integrálva, és felhasználva, hogy az integrálás a deriválás inverz művelete, kapjuk:

# Képlete

A parciális integrálás képlete a szorzat függvény deriválási szabályából jön

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$u'(x) \cdot v(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u(x)v'(x)$$

Mindkét oldalt integrálva, és felhasználva, hogy az integrálás a deriválás inverz művelete, kapjuk:

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$$

# Példa

$$\int u' v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \, dx =$$

# Példa

$$\int u' v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{e^{5x}}_v \, dx =$$

## Példa

$$\int u' v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{e^{5x}}_v \, dx = \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_u \cdot \underbrace{e^{5x}}_v - \int \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_u \cdot \underbrace{5e^{5x}}_{v'} \, dx$$

## Példa

$$\int u' v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int \underbrace{x^2}_v \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \, dx =$$



## Példa

$$\int u' v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int \underbrace{x^2}_v \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \, dx = \underbrace{x^2}_v \cdot \underbrace{\frac{1}{5} e^{5x}}_u - \int \underbrace{2x}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{1}{5} e^{5x}}_u \, dx$$

## Példa

$$\int u' v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \, dx = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \, dx =$$

## Példa

$$\int u' v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \, dx = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \, dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left( \frac{x e^{5x}}{5} - \frac{1}{5} \int e^{5x} \right) =$$

## Példa

$$\int u' v \, dx = uv - \int uv' \, dx$$

$$\int x^2 \cdot e^{5x} \, dx = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{e^{5x}}_{u'} \, dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left( \frac{x e^{5x}}{5} - \frac{1}{5} \int e^{5x} \right) = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2 e^{5x}}{125} + C$$

# Fajtái

Az alábbi 3 esetet kell felismerni:

# Fajtái

Az alábbi 3 esetet kell felismerni:

Az első eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} dx$$

# Fajtái

Az alábbi 3 esetet kell felismerni:

Az első eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} dx$$

Itt mindig a trigonometrikus/exponenciális az  $u'(x)$  és a polinom a  $v(x)$  (mert azt szeretném deriválni, így egyszerűbb alakra hozni).

# Fajtái II

Az második eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \ln(ax) \\ \arcsin(ax) \\ \arccos(ax) \\ \arctan(ax) \\ \text{arcctg}(ax) \\ \text{arsinh}(ax) \\ \vdots \end{array} \right\} dx$$



# Fajtái II

Az második eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \ln(ax) \\ \arcsin(ax) \\ \arccos(ax) \\ \arctan(ax) \\ \text{arcctg}(ax) \\ \text{arsinh}(ax) \\ \vdots \end{array} \right\} dx$$

Itt mivel csak a polinomnak ismertjük a primitív függvényét, így a polinom lesz az  $u'(x)$ .

# Fajtái II

Az második eset:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \ln(ax) \\ \arcsin(ax) \\ \arccos(ax) \\ \arctan(ax) \\ \text{arcctg}(ax) \\ \text{arsinh}(ax) \\ \vdots \end{array} \right\} dx$$

Itt mivel csak a polinomnak ismertjük a primitív függvényét, így a polinom lesz az  $u'(x)$ .

Példák  $\int \ln(x) dx = ?$ ,  $\int \text{arsinh}(x) dx = ?$ ,  $\int x \arctan(x) dx = ?$

# Fajtái III

A harmadik eset:

$$\int \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{bx} \\ \sin(bx) \\ \cos(bx) \\ \sinh(bx) \\ \cosh(bx) \end{array} \right\} dx$$

# Fajtái III

A harmadik eset:

$$\int \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{bx} \\ \sin(bx) \\ \cos(bx) \\ \sinh(bx) \\ \cosh(bx) \end{array} \right\} dx$$

Kétszer kell parciálisan integrálni. Példa:  $\int e^{3x} \sin(2x) dx = ?$

# Fajtái III

A harmadik eset:

$$\int \left\{ \begin{array}{c} e^{ax} \\ \sin(ax) \\ \cos(ax) \\ \sinh(ax) \\ \cosh(ax) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{bx} \\ \sin(bx) \\ \cos(bx) \\ \sinh(bx) \\ \cosh(bx) \end{array} \right\} dx$$

Kétszer kell parciálisan integrálni. Példa:  $\int e^{3x} \sin(2x) dx = ?$

Bizonyos párosításokat egyszerűbben is integrálhatunk. (ld. Kónya)

# Az integrálfüggvény definíciója

Az integrált egy véges szakaszon a függvény alatti területnek definiáltuk.  
Érdemes definiálni a

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$$

mennyiséget rögzített  $x_0 \in \mathbb{R}$  mellett.  $F$ -et integrálfüggvénynek nevezzük.

# Az integrálfüggvény definíciója

Az integrált egy véges szakaszon a függvény alatti területnek definiáltuk. Érdemes definiálni a

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$$

mennyiséget rögzített  $x_0 \in \mathbb{R}$  mellett.  $F$ -et integrálfüggvénynek nevezzük.

## Tétel

*Ha  $f \in R_{[a,b]}$ , akkor  $F$  folytonos, és ha ráadásképp  $f$  folytonos is, akkor  $F'(x) = f(x)$ .*

# Példa az integrálfüggvényre

Például az

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = F(x)$$

függvényt zárt alakban nem tudjuk felírni, de tudjuk, hogy:



# Példa az integrálfüggvényre

Például az

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = F(x)$$

függvényt zárt alakban nem tudjuk felírni, de tudjuk, hogy:

- ❶  $F(0) = 0$ ,
- ❷  $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ , tehát monoton nő,
- ❸  $F''(x) = -2x e^{-x^2}$  tehát konvex, ha  $x < 0$  és konkáv, ha  $x > 0$ ,

# Háttér

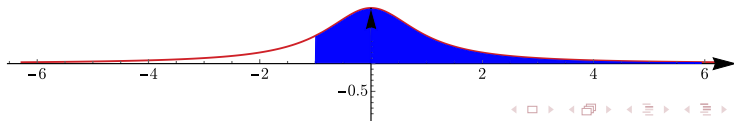
Eddig az integrált csak korlátos intervallumon, korlátos függvényre definiáltuk. De ugyanúgy kérdés lehet (akár egy fizikai rendszernél is), hogy mi az integrálja egy esetleg nem korlátos függvénynek és/vagy egy esetleg nem korlátos intervallumon.

# Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

integrált, mint egy határérték:



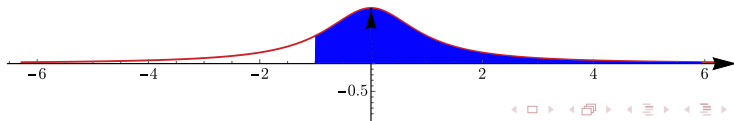
# Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$



# Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

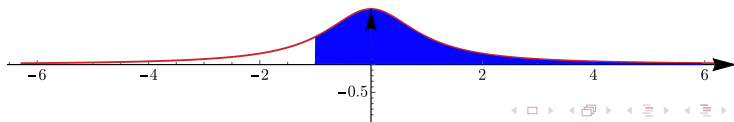
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

mivel a jobboldal minden egyes véges  $A$ -ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



# Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

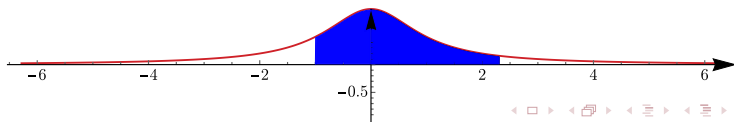
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

mivel a jobboldal minden egyes véges  $A$ -ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



# Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

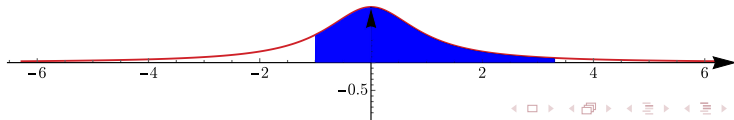
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

mivel a jobboldal minden egyes véges  $A$ -ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



# Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

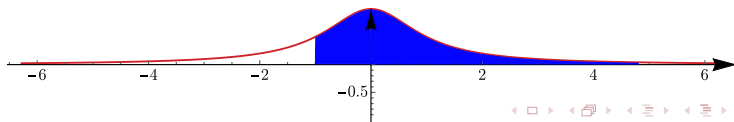
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

mivel a jobboldal minden egyes véges  $A$ -ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.





# Első típus: az integrálási intervallum nem korlátos

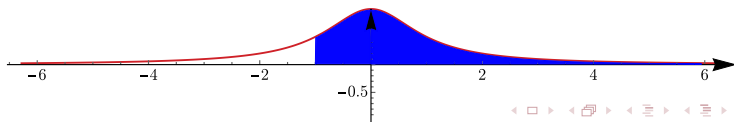
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

mivel a jobboldal minden egyes véges  $A$ -ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^{+\infty} 1 \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A 1 \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [x]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} A = +\infty$$

Az improprius integrál divergens.

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^{+\infty} 1 \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A 1 \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [x]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} A = +\infty$$

Az improprius integrál divergens.

Példa:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) \, dx = ?$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^{+\infty} 1 \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A 1 \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [x]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} A = +\infty$$

Az improprius integrál divergens.

Példa:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) \, dx = ?$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \sin(x) \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-\cos(x)]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - \cos(A))$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^{+\infty} 1 \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A 1 \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [x]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} A = +\infty$$

Az improprius integrál divergens.

Példa:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) \, dx = ?$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \sin(x) \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-\cos(x)]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - \cos(A))$$

Ennek sem létezik határértéke.

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = ?$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = ?$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x^{-3} dx =$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = ?$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x^{-3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_1^A =$$



# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x^{-3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_1^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2A^2} - \left( -\frac{1}{2 \cdot 1^2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A x^{-3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_1^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2A^2} - \left( -\frac{1}{2 \cdot 1^2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ez konvergens.

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = ?$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = ?$$

Bontsuk parciális törtre:

$$\frac{6}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} \Rightarrow 6 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = ?$$

Bontsuk parciális törtekre:

$$\frac{6}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} \Rightarrow 6 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

$$x = -2 \Rightarrow B = -2, \quad x = 1 \Rightarrow A = 2, \text{ innen}$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = ?$$

Bontsuk parciális törtekre:

$$\frac{6}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} \Rightarrow 6 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

$x = -2 \Rightarrow B = -2$ ,  $x = 1 \Rightarrow A = 2$ , innen

$$\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{2}{x - 1} - \frac{2}{x + 2} dx =$$

$$= 2 \lim_{A \rightarrow +\infty} [\ln |x - 1| - \ln |x + 2|]_2^A = 2 \left( \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln |A - 1| - \ln |A + 2| + \ln(4) \right) =$$

$$= 2 \lim_{A \rightarrow +\infty} \underbrace{\ln \left| \frac{A - 1}{A + 2} \right|}_{\rightarrow 1} + 2 \ln(4) = 2 \ln(4). \text{ Ez konvergens.}$$

## Példák az első típusra

Természetesen  $-\infty$ -re analóg módon megy, **példa**:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2} dx = ?$$

# Példák az első típusra

Természetesen  $-\infty$ -re analóg módon megy, **példa**:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2} dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4 + \frac{4x^2}{4}} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-1} \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx =$$



# Példák az első típusra

Természetesen  $-\infty$ -re analóg módon megy, **példa**:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2} dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4 + \frac{4x^2}{4}} dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-1} \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{4} \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right]_A^{-1} = \left( \frac{\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \right) - \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{\arctan\left(\frac{A}{2}\right)}{2} \end{aligned}$$

# Példák az első típusra

Természetesen  $-\infty$ -re analóg módon megy, **példa**:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2} dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4 + \frac{4x^2}{4}} dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-1} \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{4} \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right]_A^{-1} = \left( \frac{\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \right) - \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{\arctan\left(\frac{A}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}{2}. \end{aligned}$$

# Példák az első típusra

Természetesen  $-\infty$ -re analóg módon megy, **példa**:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4+x^2} dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4 + \frac{4x^2}{4}} dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-1} \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{4} \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right]_A^{-1} = \left( \frac{\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \right) - \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{\arctan\left(\frac{A}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}{2}. \end{aligned}$$

Tehát konvergens.

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}} dx = ?$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}} dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x) dx =$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}} dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}} dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x) dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\ln^{-\frac{1}{2}}(2-x)}{-\frac{1}{2}} \right]_A^{-1} = \lim_{A \rightarrow -\infty} -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} + \frac{2}{\sqrt{\ln(2-A)}} \end{aligned}$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}} dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}} dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x) dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\ln^{-\frac{1}{2}}(2-x)}{-\frac{1}{2}} \right]_A^{-1} = \lim_{A \rightarrow -\infty} -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} + \frac{2}{\sqrt{\ln(2-A)}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} \end{aligned}$$

# Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}} dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}} dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x) dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\ln^{-\frac{1}{2}}(2-x)}{-\frac{1}{2}} \right]_A^{-1} = \lim_{A \rightarrow -\infty} -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} + \frac{2}{\sqrt{\ln(2-A)}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} \end{aligned}$$

Tehát konvergens.



# Fontos megjegyzés

**Megjegyzés:** Az  $\int_a^b f(x) dx$  improprius integrált (ahol  $a$  és  $b$  lehet  $\pm\infty$  is) csak akkor mondjuk konvergensnek, ha minden  $c \in (a,b)$ -re

$$\int_a^c f(x) dx, \quad \int_c^b f(x) dx$$

integrálok konvergensek.

# Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-A}^B x \, dx$$

Ha  $A = B$ -t választanánk, akkor az integrál minden  $A$ -ra 0 lenne, így

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-A}^A = 0$$

# Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-A}^B x \, dx$$

Ha  $A = B$ -t választanánk, akkor az integrál minden  $A$ -ra 0 lenne, így

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-A}^A = 0$$

De a fenti megjegyzésben  $c = 0$ -t választva

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^A = +\infty,$$

# Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-A}^B x \, dx$$

Ha  $A = B$ -t választanánk, akkor az integrál minden  $A$ -ra 0 lenne, így

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-A}^A = 0$$

De a fenti megjegyzésben  $c = 0$ -t választva

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^A = +\infty, \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^0 x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-A}^0 = -\infty,$$

# Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-A}^B x \, dx$$

Ha  $A = B$ -t választanánk, akkor az integrál minden  $A$ -ra 0 lenne, így

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-A}^A = 0$$

De a fenti megjegyzésben  $c = 0$ -t választva

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^A = +\infty, \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^0 x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-A}^0 = -\infty,$$

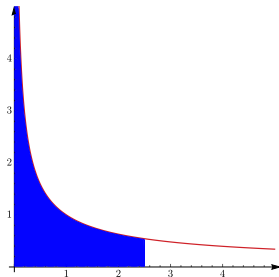
Tehát ez az improprius integrál divergens. (Viszont szokták azt mondani, hogy a Cauchy-féle főértéke véges.)

## Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy  $f$  nem korlátos  $a$  egy jobboldali pontozott környezetében ( $f$  tipikusan nincs is értelmezve  $a$ -ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:



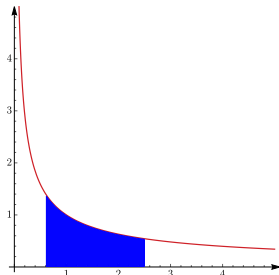
## Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy  $f$  nem korlátos  $a$  egy jobboldali pontozott környezetében ( $f$  tipikusan nincs is értelmezve  $a$ -ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow a+} \int_{\omega}^b f(x) dx$$



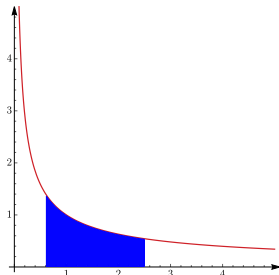
## Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy  $f$  nem korlátos  $a$  egy jobboldali pontozott környezetében ( $f$  tipikusan nincs is értelmezve  $a$ -ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow a+} \int_{\omega}^b f(x) dx$$





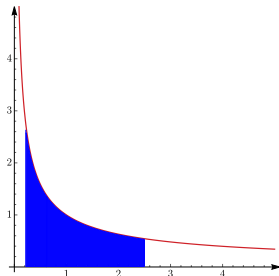
## Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy  $f$  nem korlátos  $a$  egy jobboldali pontozott környezetében ( $f$  tipikusan nincs is értelmezve  $a$ -ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow a+} \int_{\omega}^b f(x) dx$$



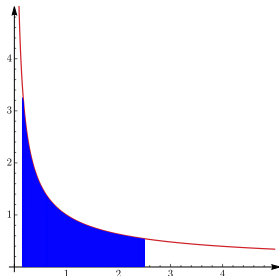
## Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy  $f$  nem korlátos  $a$  egy jobboldali pontozott környezetében ( $f$  tipikusan nincs is értelmezve  $a$ -ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow a+} \int_{\omega}^b f(x) dx$$



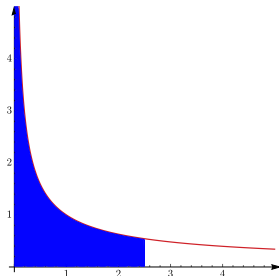
## Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy  $f$  nem korlátos  $a$  egy jobboldali pontozott környezetében ( $f$  tipikusan nincs is értelmezve  $a$ -ban), ekkor az:

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow a+} \int_{\omega}^b f(x) dx$$



## Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy  $f$  nem korlátos  $b$  egy baloldali pontozott környezetében, ekkor az:

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

## Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy  $f$  nem korlátos  $b$  egy baloldali pontozott környezetében, ekkor az:

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow b-} \int_a^{\omega} f(x) dx$$

## Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy  $f$  nem korlátos  $c \in (a, b)$  egy pontozott környezetében, ekkor az:

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

## Második típus: a függvény nem korlátos

Tegyük fel, hogy  $f$  nem korlátos  $c \in (a, b)$  egy pontozott környezetében, ekkor az:

$$\int_a^b f(x) dx$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow c-} \int_a^{\omega} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow c+} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx$$

Itt is igaz a **Fontos megjegyzés!** Lásd:  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$  impr. integrál divergens.

# Példa a második típusra

Példa:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$



# Példa a második típusra

Példa:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$

Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\omega \rightarrow 1^-} \int_0^{\omega} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{\frac{1}{2}}(x) dx =$$

# Példa a második típusra

Példa:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\omega \rightarrow 1-} \int_0^{\omega} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{\frac{1}{2}}(x) dx = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 1-} \left[ \frac{\arcsin^{\frac{3}{2}}(x)}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow 1-} \frac{2 \arcsin^{\frac{3}{2}}(\omega)}{3} - 0 = \frac{2}{3} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

# Területszámítás

Az  $f$  és  $g$  függvények grafikonjai által közbezárt terület:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

# Területszámítás

Az  $f$  és  $g$  függvények grafikonjai által közbezárt terület:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

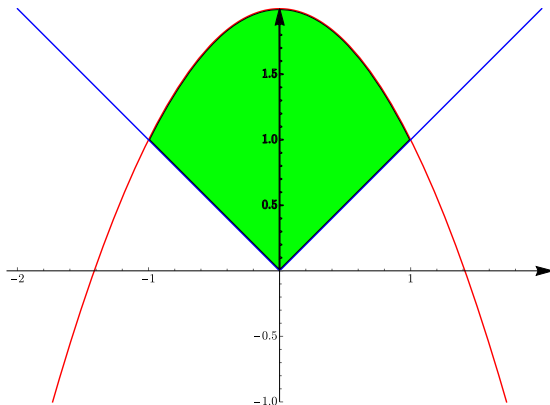
Ahol,  $a$  és  $b$   $f$  és  $g$  függvények grafikonjainak metszéspontjai, azaz az  $f(x) = g(x)$  egyenlet megoldásai.

# Területszámítás Példa

**Példa:** Számítsuk ki az  $|x|$  és a  $2 - x^2$  függvények által közbezárt területet.

# Területszámítás Példa

**Példa:** Számítsuk ki az  $|x|$  és a  $2 - x^2$  függvények által közbezárt területet.



# Területszámítás Példa

**Példa:** Számítsuk ki az  $|x|$  és a  $2 - x^2$  függvények által közbezárt területet.

# Területszámítás Példa

**Példa:** Számítsuk ki az  $|x|$  és a  $2 - x^2$  függvények által közbezárt területet.

Megoldás:

$$\int_{-1}^1 |2 - x^2 - |x|| \, dx = 2 \int_0^1 2 - x^2 - x \, dx = 2 \left[ 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$$



# Területszámítás Példa

**Példa:** Számítsuk ki az  $|x|$  és a  $2 - x^2$  függvények által közbezárt területet.

Megoldás:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |2 - x^2 - |x|| \, dx &= 2 \int_0^1 2 - x^2 - x \, dx = 2 \left[ 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= 2 \left[ 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 0 \right] = \end{aligned}$$

# Területszámítás Példa

**Példa:** Számítsuk ki az  $|x|$  és a  $2 - x^2$  függvények által közbezárt területet.

Megoldás:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |2 - x^2 - |x|| \, dx &= 2 \int_0^1 2 - x^2 - x \, dx = 2 \left[ 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= 2 \left[ 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 0 \right] = 2 \frac{7}{6} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

# Ívhossz

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $a$  és  $b$  között a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

# Ívhossz

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $a$  és  $b$  között a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Példa:** Számoljuk ki  $\cosh(x)$  grafikonjának hosszát  $-145$  és  $145$  között:

# Ívhossz

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $a$  és  $b$  között a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Példa:** Számoljuk ki  $\cosh(x)$  grafikonjának hosszát  $-145$  és  $145$  között:  
Ekkor  $a = -145$ ,  $b = 145$   $f(x) = \cosh(x)$ . Így:

# Ívhossz

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $a$  és  $b$  között a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Példa:** Számoljuk ki  $\cosh(x)$  grafikonjának hosszát  $-145$  és  $145$  között:  
Ekkor  $a = -145$ ,  $b = 145$   $f(x) = \cosh(x)$ . Így:

$$\int_{-145}^{145} \sqrt{1 + (\cosh'(x))^2} dx = \int_{-145}^{145} \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx =$$

# Ívhossz

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $a$  és  $b$  között a grafikon hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Példa:** Számoljuk ki  $\cosh(x)$  grafikonjának hosszát  $-145$  és  $145$  között:  
Ekkor  $a = -145$ ,  $b = 145$   $f(x) = \cosh(x)$ . Így:

$$\begin{aligned} \int_{-145}^{145} \sqrt{1 + (\cosh'(x))^2} dx &= \int_{-145}^{145} \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx = \\ \int_{-145}^{145} \cosh(x) dx &= \sinh(145) - \sinh(-145) = 2 \sinh(145) \end{aligned}$$

# Forgástestek térfogata

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $f$  grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$



# Forgástestek térfogata

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $f$  grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

**Példa:** Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát:

# Forgástestek térfogata

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $f$  grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

**Példa:** Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát:

Ekkor  $a = -1$ ,  $b = 1$   $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Így:

# Forgástestek térfogata

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $f$  grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

**Példa:** Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát:

Ekkor  $a = -1$ ,  $b = 1$   $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Így:

$$\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \pi \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \dots$$

# Forgástestek térfogata

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $f$  grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

**Példa:** Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát:

Ekkor  $a = -1$ ,  $b = 1$   $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Így:

$$\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \pi \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \pi \left[ 1 - \frac{1}{3} - \left( -1 - \frac{-1}{3} \right) \right] = \frac{4\pi}{3}.$$

# Forgástestek térfogata

Ha  $f$  folytonos  $(a,b)$ -n, akkor az  $f$  grafikonjának az  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx$$

**Példa:** Számoljuk ki az egységsugarú gömb térfogatát:

Ekkor  $a = -1$ ,  $b = 1$   $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Így:

$$\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \pi \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \pi \left[ 1 - \frac{1}{3} - \left( -1 - \frac{-1}{3} \right) \right] = \frac{4\pi}{3}.$$

Gömb térfogata:  $V = \frac{4r^3\pi}{3}$ .

# Félév során vettük

- 1 Lineáris algebra (mátrixok, vektorok Gauss-elimináció)
- 2 Sorozatok határértéke
- 3 Függvények határértéke
- 4 Komplex Számok
- 5 Differenciál, deriválás (függvényvizsgálat)
- 6 Integrálás